f est strictement croissante sur $\left[\ln\frac{1}{2},+\infty\right[$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty,\ln\frac{1}{2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(g(x)\right)=\ln(1)=0$

$\Rightarrow y=0$ est une asymptote a C au voisinage de $-\infty$.

Soit T la tangente a C_f au point $O(0,0)$.

$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

T: $\boxed{y=x}$

$f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=\ln\left(g\left(\ln\frac{1}{2}\right)\right)=\ln\frac{3}{4}$

(voir courbe au dessus)

Exercice 23

$f(x)=\sqrt{1+x}.e^{-x}, x\in[-1,+\infty[$

1) a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{1+x}.e^{-x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{1+x}^2.e^{-x}}{\sqrt{1+x}(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{e}{0^+}=+\infty$

f non dérivable à droite en -1.

b) la courbe représentative C_f admet au point d'abscisse (-1) une demi tangente verticale dirigé vers le haut

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}.e^{-x}, \quad X=-x$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}(\sqrt{1-X}.e^{X})\times\dfrac{\sqrt{1-X}}{\sqrt{1-X}}$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{(1-X)e^{X}}{\sqrt{1-X}}$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{e^{X}-Xe^{X}}{\sqrt{1-X}}=0$

Ou bien : on sait que $\sqrt{e^{-2x}}=e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}.e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(1+x).e^{-2x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x}}+\dfrac{x}{e^{2x}}}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{X}}+\dfrac{X}{2e^{X}}}; X=2x$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{X}}+\dfrac{1}{2\dfrac{e^{X}}{X}}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote a C au voisinage de $+\infty$.

2) f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a :

$f'(x)=\sqrt{1+x}'e^{-x}+\sqrt{1+x}.e^{-x}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}e^{-x}-\sqrt{1+x}.e^{-x}$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\sqrt{1+x}\right)$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1-2(1+x)}{2\sqrt{1+x}}\right)$

$f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+x}}(-1-2x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-1-2x$

T.V :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0